
JOURNÉES DU GDR AFHP 2023

25 - 27 OCTOBRE 2023

PORQUEROLLES, FRANCE



Inria

Table des matières

Programme de la semaine	2
Journée du 25 octobre 2023	3
<i>Propriétés de relèvement pour les C^*-algèbres : du local au global ?</i> , Pisier Gilles	3
<i>Autour de la conjecture fois 2, fois 3 de Furstenberg</i> , Badea Catalin	5
<i>Semi-classical analysis of sublaplacian on step 2 nilmanifolds</i> , Fermanian Kammerer Clotilde	6
<i>Composition operators on general complex domains</i> , Pozzi Elodie	7
<i>Sharp Invertibility in Quotient Algebras of H^∞</i> , Thomas Pascal J. [et al.]	8
<i>Opérateurs de composition à poids elliptiques sur la boule unité de \mathbb{C}^N</i> , Oger Lucas	9
<i>Mesures, anneaux et dimensions</i> , Seuret Stéphane	10
Journée du 26 octobre 2023	11
<i>Shift invariant subspaces of large index in the Bloch space</i> , Biehler Nikiforos . . .	11
<i>Inverse Poisson Problems in divergence form. Issues of Sparsity and of Consistency</i> , Baratchart Laurent	13
<i>Different numerical approaches for the Magnetization Inverse Problem</i> , Villalobos Guillén Cristóbal	14
<i>Extensions dissipatives d'opérateurs antisymétriques</i> , Eymard Robert	15
<i>Convolution integral equations on an interval and asymptotic solution of the related spectral problem</i> , Ponomarev Dmitry	16
<i>Cyclicité de l'opérateur du shift dans les espaces de De Branges-Rovnyak : en route vers une caractérisation complète</i> , Lebreton Romain	17
<i>An analytic function space perspective on numerical stability and overfitting</i> , Szehr Oleg [et al.]	18
<i>Quantification of unique continuation for the Laplace operator in 2d and application to the control of a semi-linear parabolic equation</i> , Ervedoza Sylvain	19
Journée du 27 octobre 2023	20
<i>Remarques sur représentation et unicité pour l'équation de la chaleur</i> , Auscher Pascal	20
<i>Global Stein Theorems and Hankel operators in the upper half plane</i> , Bonami Aline	22
Liste des participants	23

Programme de la semaine

	<u>Mar. 24</u>	<u>Mer. 25</u>	<u>Jeu. 26</u>	<u>Ven. 27</u>
09:00		Ouverture	Exposés scientifiques	Exposés scientifiques
		Exposés scientifiques		
10:00				
		Pause café	Pause café	Pause café
11:00		Exposés scientifiques	Exposés scientifiques	Cloture des journées
12:00		Déjeuner, temps libre	Déjeuner, temps libre	Déjeuner
13:00				
14:00				
15:00				
		Exposés scientifiques	Exposés scientifiques	
16:00	Accueil			
		Pause café	Pause café	
17:00		Exposés scientifiques	Exposés scientifiques	
18:00				

Journée du 25 octobre 2023

Gilles Pisier, Sorbonne Université (Paris)

“Propriétés de relèvement pour les C^ -algèbres : du local au global ?”*

Le problème de relèvement consiste pour nous à relever une application $u : X \rightarrow C/I$ d'un espace de Banach (ou un espace d'opérateurs) X à valeurs dans une C^* -algèbre qui est un quotient C/I d'une autre C^* -algèbre C par un idéal (bilatère fermé self-adjoint). Le relèvement cherché est une application de X dans C de même nature que u (e.g. borné ou complètement borné). Dans plusieurs cas importants la question de savoir quand l'existence de relèvements locaux implique celle d'un relèvement global est un important problème ouvert. Ce sera le thème de notre exposé.

Catalin BADEA, Université de Lille

“Autour de la conjecture fois 2, fois 3 de Furstenberg”

Pour $n \geq 1$, on note par T_n l'application $x \mapsto nx \pmod{1}$ sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le but de mon exposé est de présenter la conjecture $\times 2, \times 3$ de Furstenberg : la seule mesure de probabilité sur \mathbb{T} , sans atome, qui est invariante par T_2 et T_3 est la mesure de Lebesgue normalisée. On discutera aussi quelques résultats autour de cette conjecture obtenus en collaboration avec Sophie Grivaux.

Clotilde FERMANIAN KAMMERER, Larema, Université d'Angers,
Upec, CNRS

“Semi-classical analysis of sublaplacian on step 2 nilmanifolds”

In this talk, we describe results obtained in collaboration with Véronique Fischer and Steven Flynn, both from the university of Bath. We develop semi-classical technics on graded nilpotent Lie groups and explain how to adapt them to nilmanifolds obtained as the left quotient of these groups by co-compact subgroups. As an application, we derive properties of sequences of eigenfunctions of the sub-Laplacian of a nilmanifold in the case where the group has two steps.

Elodie Pozzi, Saint Louis University (Saint Louis, MO, USA)

“Composition operators on general complex domains”

The composition operator is a well-known linear operator acting boundedly on several analytic function spaces. There is a profusion of remarkable results on the composition operator on the Hardy space H^p and the Bergman space A^p of the unit disk \mathbb{D} , for instance. Less is known on domains with less regular boundary. In this talk, we give an overview of some results on less smooth domains. We will give a new boundedness result on Carleson domains, known as domains Ω (bounded or unbounded) such that for any Carleson measure μ , the $L^1(\Omega, d\mu)$ -norm of a function in H^1 is less than $C(\mu)\|f\|_{L^1(\partial\Omega)}$. We will provide some simple general domains for which the composition operator is bounded. It is based on a current joint work with B.R. Choe, H. Koo and W. Smith.

Pascal THOMAS, Université Paul Sabatier (Toulouse 3)

“Sharp Invertibility in Quotient Algebras of H^∞ ”

Given an inner function $\Theta \in H^\infty(\mathbb{D})$ and $[g]$ in the quotient algebra $H^\infty/\Theta H^\infty$, its quotient norm is $\|[g]\| := \inf \{\|g + \Theta h\|_\infty, h \in H^\infty\}$. We show that when g is normalized so that $\|[g]\| = 1$, the quotient norm of its inverse can be made arbitrarily close to 1 by imposing $|g(z)| \geq 1 - \delta$ when $\Theta(z) = 0$ (the only points where one can define unambiguous values for the class $[g]$) if and only if the function Θ satisfies the following property :

$$\liminf_{t \rightarrow 1} \{|\Theta(z)| : z \in \mathbb{D}, \rho(z, \Theta^{-1}\{0\}) \geq t\} = 1,$$

where ρ is the usual pseudohyperbolic distance in the disc, $\rho(z, w) := \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right|$. This last property may be satisfied or not by an inner function.

When Θ is a Blaschke product, under a condition of “super-separation” of the zeros, this property is equivalent to Θ being a thin Blaschke product.

We show that there exists Blaschke products which are interpolating and fail this property, while some Blaschke products with this property may fail to be interpolating (and thus aren’t thin). We exhibit some sufficient conditions, and interesting examples.

Lucas OGER, Université Gustave Eiffel

“Opérateurs de composition à poids elliptiques sur la boule unité de \mathbb{C}^N ”

Considérons $N \geq 2$, \mathbb{B}_N la boule unité de \mathbb{C}^N , et $\text{Hol}(\mathbb{B}_N)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{B}_N à valeurs dans \mathbb{C} . Soit $\phi : \mathbb{B}_N \rightarrow \mathbb{B}_N$ et $m : \mathbb{B}_N \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. L'opérateur de composition $W_{m,\phi}$ de symbole ϕ et de poids m est défini par la formule suivante.

$$W_{m,\phi}(f) = m(f \circ \phi), \quad f \in \text{Hol}(\mathbb{B}_N).$$

Dans cet exposé, nous nous intéressons plus particulièrement aux opérateurs dont le symbole ϕ est elliptique, c'est-à-dire lorsque ϕ possède un point fixe dans \mathbb{B}_N . Quitte à conjuguer, nous supposons que 0 est un point fixe de ϕ . Nous étudions les propriétés générales (continuité, inversibilité, compacité) et les spectres de ces opérateurs.

Stéphane Seuret, Université Paris-Est Créteil

“Mesures, anneaux et dimensions”

Dans cet exposé, on s'intéressera à la possibilité pour une mesure de probabilité sur R^d de charger infiniment souvent des anneaux très fins centrés un point donné. Cette question est liée à des problèmes de temps de retour en systèmes dynamiques. La réponse dépend de la mesure, de la dimension de l'espace, de la largeur de l'anneau, ainsi que de la norme utilisée pour définir l'anneau. C'est un travail issu d'une collaboration avec Zoltan Buczolich.

Journée du 26 octobre 2023

Nikiforos BIEHLER, Université Gustave Eiffel (Marne-la-Vallée)

“Shift invariant subspaces of large index in the Bloch space”

We construct invariant subspaces of the Shift operator M_z , defined on the Bloch space \mathcal{B} and the little Bloch space \mathcal{B}_0 . The index of an invariant subspace E is defined as $\text{ind}(E) := \dim(E/zE)$. We construct closed, shift invariant subspaces in the Bloch space that can have index as large as the cardinality of the unit interval $[0, 1]$. Next we provide two different constructions of closed, shift invariant subspaces in the little Bloch space that have arbitrary large, but countable, index.

Laurent Baratchart, INRIA Sophia Antipolis

“Inverse Poisson Problems in divergence form. Issues of Sparsity and of Consistency.”

Based on Joint work with : D. Hardin, C. Villalobos-Guillén, as well as J. Leblond, M. Nemaire.

We consider inverse Poisson problems of the form $\Delta u = \operatorname{div} M$, $u(\infty) = 0$, where a \mathbf{R}^3 -valued source M supported on a set S is to be recovered from knowledge of ∇u away from $\operatorname{supp} M$. Such problems arise naturally in static Electromagnetism, like inverse magnetization problem or Electro-Encephalography.

We discuss notions of sparsity, in this infinite-dimensional context, that ensure consistency of minimizing a regularized criterion like $\|f - AM\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda \|M\|_{TV}$ where $A(M) = \nabla u$ is the forward operator, Q the measurement place, λ a regularization parameter and $\|M\|_{TV}$ is the total variation norm of M , represented as a \mathbf{R}^3 -valued measure. Such notions depend on the kernel of A , that depends in turn of the geometry of S : the cases of open and closed surfaces turn out to be different. We also touch on some aspects of discretization, and discuss the case of volumic sample which is quite open.

This work is concerned with inverse potential problems with source term in divergence form. That is, an \mathbb{R}^3 -valued vector field on \mathbb{R}^3 has to be recovered knowing (one component of) the field of the Newton potential of its divergence on a piece of surface, away from the support. Such issues typically arise in source identification from field measurements for Maxwell's equations, in the quasi-static regime. They occur for instance in geomagnetism and paleomagnetism, as well as in several non-destructive testing problems; e.g., see [5, 8, 6] and their bibliographies. A model problem of our particular interest is inverse scanning magnetic microscopy, as considered for instance in [2, 7, 1] to recover magnetization distributions of thin rock samples, but the considerations below are of a more general and abstract nature.

The theoretical inverse problem is ill-posed since the forward operator has a kernel so extra assumptions are needed to ensure uniqueness of solutions. We will start by exploring the theoretical limitation of the inverse problem given by this kernel [3, 4]. Then, we will focus on the planar case, where we have found two cases where we could theoretically recover the original magnetization; if we either assume that the solution is sparse (in a measure theoretical way specified in that paper but that include the standard notion of sparsity, such as a collection of separated points), or if we assume that we know a priori regions of the sample that are magnetized in a single direction. This is done by taking a measure theoretical equivalent to the group LASSO regularization technique and taking the regularizing parameter to zero. Unfortunately, this method relies in zero noise, which is not the case when working with real data and we will show what the problems of the naive use of the group LASSO technique. Then, we will show different techniques to overcome this issues, including extension of the data or changing the how the measurements are taken, together with different machine leaning techniques.

Références

- [1] L. Baratchart, S. Chevillard, and J. Leblond. Silent and equivalent magnetic distributions on thin plates. In *Harmonic Analysis, Function Theory, Operator Theory, and Their Applications*, volume 18 of *Theta series in advanced mathematics*, 2017.
- [2] L. Baratchart, D. Hardin, E. Lima, E. Saff, and B. Weiss. Characterizing kernels of operators related to thin-plate magnetizations via generalizations of hodge decompositions. *Inverse Problems*, 29(1) :015004, 2013.
- [3] L. Baratchart, C. Villalobos Guillén, and D. P. Hardin. Inverse potential problems in divergence form for measures in the plane. *ESAIM : COCV*, 27 :87, 2021.
- [4] L. Baratchart, C. Villalobos Guillén, D. P. Hardin, M. C. Northington, and E. B. Saff. Inverse potential problems for divergence of measures with total variation regularization. *Foundations of Computational Mathematics*, Nov 2019.
- [5] R. J. Blakely. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [6] R. Kress, L. Kühn, and R. Potthast. Reconstruction of a current distribution from its magnetic field. *Inverse Problems*, 18 :1127–1146, 2002.
- [7] E. A. Lima, B. P. Weiss, L. Baratchart, D. P. Hardin, and E. B. Saff. Fast inversion of magnetic field maps of unidirectional planar geological magnetization. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 118(6) :2723–2752, 2013.
- [8] R. L. Parker. *Geophysical inverse theory*. Princeton University Press, 1994.

Robert EYMARD, Université Gustave Eiffel (Marne-la-Vallée)

“Extensions dissipatives d’opérateurs antisymétriques”

Cet exposé porte sur des travaux réalisés en collaboration avec W. Arendt (Université d’Ulm) et I. Chalendar (Université Gustave Eiffel).

Soit V un espace de Hilbert sur le corps des réels ou des complexes, et soit A_0 un opérateur antisymétrique dont le domaine est dense dans V . L’opérateur adjoint de $-A_0$, noté A , s’écrit alors au moyen d’un quadruplet (H_+, G_+, H_-, G_-) , où H_{\pm} sont deux espaces de Hilbert, et G_{\pm} sont deux opérateurs dont le domaine est celui de A , et dont les images sont H_{\pm} . Ce quadruplet permet d’exprimer l’analogie des formules d’intégration par parties rencontrées avec des opérateurs aux dérivées partielles, les opérateurs G_{\pm} s’apparentant alors à des opérateurs de trace sur la frontière du domaine. Nous montrons alors que le domaine de toute extension dissipative B de A_0 est inclus dans celui de A , et est caractérisé par une contraction de H_- vers H_+ . Nous pouvons alors définir en ces termes toutes les extensions m-dissipatives de A_0 . Quelques exemples illustrent ces résultats.

Dmitry PONOMAREV, Inria Centre Côte d’Azur

“Convolution integral equations on an interval and asymptotic solution of the related spectral problem”

Integral operators with kernels depending on difference of its arguments arise in various applied areas of physics and engineering in addition to being a subject of a purely theoretical interest. After reviewing the classical Wiener-Hopf method dealing with convolution equations on a half-line, we focus on the homogeneous integral equation on a finite interval. Restricting ourselves to the class of positive definite kernels given by decaying smooth even real-valued functions, we show how an extended Wiener-Hopf method can be used to construct asymptotic approximation to the solutions (i.e. eigenvalue-eigenfunction pairs) when the interval is large. The proposed method allows obtaining results which generalize those previously available for fast (mostly exponentially) decaying kernels. If time permits, we will also deal with the case of the small interval proposing an intuitive technique based on the approximation by a kernel admitting a commuting differential operator and furnishes the solution in terms of special functions (prolate spheroidal harmonics).

Romain LEBRETON, Université de Lille (Villeneuve d'Ascq)

“Cyclicité de l'opérateur du shift dans les espaces de De Branges-Rovnyak : en route vers une caractérisation complète”

La cyclicité de l'opérateur du shift S sur l'espace de Hardy hilbertien $H^2(\mathbb{D})$ a été étudiée et résolue dès 1949 par Arne Beurling qui a, d'une part, complètement décrit les sous-espaces invariants du shift comme étant de la forme ΘH^2 , avec Θ intérieure et, d'autre part, caractérisé les vecteurs cycliques de S comme étant les fonctions extérieures. Ce travail fondateur a ensuite donné lieu à de nombreux travaux mais l'espace de Hardy reste l'un des rares espaces pour lesquels on dispose d'une caractérisation aussi complète. Dans cet exposé, nous allons discuter d'une classe importante de sous-espaces (non fermés) contractivement inclus dans H^2 , les espaces de De Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$, associés à une fonction b dans la boule unité de H^∞ et telle que $\log(1 - |b|) \in L^1(\mathbb{T})$. Dans ce cas, on sait que le shift S agit aussi comme un opérateur borné sur $\mathcal{H}(b)$ (bien que cela ne soit plus une contraction !). Bien que quelques résultats de Sarason notamment soient apparus autour de la cyclicité du shift sur $\mathcal{H}(b)$, une étude systématique a été initiée dans deux articles récents de Fricain–Grivaux et Alex Bergmann. Le but de cet exposé est de présenter quelques uns des résultats obtenus dans ces deux papiers et quelques unes de mes contributions obtenues en collaboration avec E. Fricain qui généralisent certains résultats de Grivaux–Fricain.

Szehr Oleg, IDSIA (Lugano)

“An analytic function space perspective on numerical stability and overfitting”

The study of eigenvalues of non-normal matrices plays a prominent role in numerous applications. But it is a well-known and frequent phenomenon that eigenvalue analysis is misleading when one is interested in global properties of (large) non-normal systems. Behind this stands a form of 'instability', where tiny perturbations lead to an overall significant impact and which can be quantified making use of the concept of pseudo-spectrum. In this talk we discuss the behavior of pseudo-spectra 'in the worst case', provide the extremal matrices and sharp methods (and bounds) on the behavior of pseudo-spectra. We demonstrate that 'the worst case behavior' can be quantified in the language of analytic function spaces and we show how high-level system properties such as 'in-stability' and 'susceptibility to overfitting' can be traced back to notions of the underlying analytic spaces.

Sylvain ERVEDOZA
Institut de Mathématiques de Bordeaux and CNRS

“Quantification of unique continuation for the Laplace operator in 2d and application to the control of a semi-linear parabolic equation”

Joint Work with Kévin Le Bal’h (Laboratoire Jacques-Louis Lions and INRIA).

The goal of this talk is to present some recent results on the unique continuation of the Laplace operator, and its quantification in terms of the norm of the potential.

This result is strongly inspired by the impressive work by A. Logunov, E. Malinnikova, N. Nadirashvili and F. Nazarov proving the Landis conjecture in the plane (<https://arxiv.org/abs/2007.07034>), that we shall carefully adapt to our case.

We will present the main steps of the proof, and in particular : a perforation process based on the nodal set of the functions at hand that transforms the domain to a perforated domain with small Poincaré constant ; a quasiconformal transformation to reduce the elliptic equation into an harmonic equation ; and Carleman estimates conjugated with Harnack inequalities.

As an application, we will derive new results for controlling semi-linear elliptic equations in the spirit of E. Fernandez-Cara and E. Zuazua’s open problem concerning the small-time global null-controllability of slightly super-linear heat equations.

Journée du 27 octobre 2023

Pascal Auscher, Université de Paris-Saclay (Orsay)

“Remarques sur représentation et unicité pour l'équation de la chaleur”

Je souhaite rapporter sur les travaux effectués avec mon étudiant Hedong Hou dans le cadre de sa thèse. La question est de savoir sous quelles conditions pratiques d'emploi, on peut affirmer qu'une solution de l'équation de la chaleur a une trace (éventuellement au sens des distributions tempérées) et être représentée par le semi-groupe de la chaleur appliqué à cette trace. La question se posait pour des équations paraboliques avec coefficients et on s'est rendu compte qu'on ne trouvait l'information dans ce cas modèle. L'intérêt de notre résultat réside en une formule de représentation “interne” qui découle simplement de la formule de Green.

Aline BONAMI, Institut Denis Poisson, Université d'Orléans

“Global Stein Theorems and Hankel operators in the upper half plane”

We first give a global version on \mathbb{R}^n of a well-known theorem of E. Stein, which says that the maximal function of an integrable non negative function f that is supported in a ball B is in $L^1(B)$ if and only if it belongs to the space $L\text{Log}L$. Namely, a function $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ is in the Hardy space $H^1(\mathbb{R}^n)$ when it satisfies the two conditions :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f|(\ln_+(|f|) + \ln_+(|x|)) dx < \infty,$$

and the converse holds for functions which are non negative outside a compact set and bounded below. We then give analogous conditions on integrable functions f in the upper half plane in order that their Bergman projection $P_B f$ be also integrable. We then consider $L^p - L^1$ inequalities with loss of Hankel operators.

Liste des participants

- Auscher Pascal
- Badea Catalin
- Baratchart Laurent
- Batakis Athanasios
- Ben Hafsia Sana
- Biehler Nikiforos
- Bonami Aline
- Chalendar Isabelle
- Charpentier Stéphane
- Ernst Romuald
- Ervedoza Sylvain
- Eymard Robert
- Ferenczi Valentin
- Fermanian Kammerer Clotilde
- Grellier Sandrine
- Harrat Ayoub
- Leblond Juliette
- Lebreton Romain
- Lefèvre Pascal
- Oger Lucas
- Pisier Gilles
- Ponomarev Dmitry
- Pozzi Elodie
- Raissy Jasmin
- Rible Quentin
- Seuret Stéphane
- Strouse Elizabeth
- Szehr Oleg
- Thomas Pascal J.
- Villalobos Guillén Cristóbal
- Wick Brett
- Yousfi Anass